

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 21/22

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 14.07.2022

Esercizio 1 (6 punti). Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x < -1, y = 0\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2, y = 0\}.$$

- Rappresentare graficamente l'insieme $X = A \cup B \cup C$.

Dire, senza giustificare la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- X è aperto;
- X è chiuso;
- X è limitato.

Indicare, senza giustificare, la parte interna $\overset{\circ}{X}$ e il derivato $D(X)$ dell'insieme X :

$$\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \quad \quad \}$$

$$D(X) =$$

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare¹

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3) + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Detto ℓ il valore di tale limite, stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3) + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \ell & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è:

- derivabile in $(0, 0)$;
- differenziabile in $(0, 0)$.

¹Può essere utile la disuguaglianza $|\sin(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Esercizio 3 (8 punti). Classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy.$$

Determinare poi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f$$

e stabilire se la funzione f ammette massimo e minimo assoluti in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 4 (10 punti). Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 2\}.$$

Calcolare

$$\iint_D xy \, dx dy.$$

Usando il risultato ottenuto, calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_E xyz \, dx dy dz$$

essendo

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}.$$